

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

📖 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2 = (2; -1; 2)$. B. $\vec{n}_4 = (3; 2; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (3; 2; 2)$. D. $\vec{n}_1 = (3; 2; -1)$.

Lời giải

Mặt phẳng $3x + y - 7z - 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1; -7)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?

- A. $Q(1; -2; 2)$. B. $N(1; -1; -1)$. C. $P(2; -1; -1)$. D. $M(1; 1; -1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm Q, N, P, M vào phương trình mặt phẳng (α) , thấy tọa độ điểm N thỏa mãn.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 2; 1)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (5; 2; -3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $5x + 2y - 3z - 17 = 0$. B. $2x + 2y + z - 11 = 0$.
C. $5x + 2y - 3z - 11 = 0$. D. $2x + 2y + z - 17 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$5(x - 2) + 2(y - 2) - 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 3z - 11 = 0$$

Vậy $(P): 5x + 2y - 3z - 11 = 0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$. Một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

- A. $(-1; 1; 3)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(2; 4; 1)$.

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$. Do đó một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là: $(-1;1;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;1)$, $N(1;2;3)$. Phương trình đường thẳng MN là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-1+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-3-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2, t \in \mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-2;4;2)$.

Đường thẳng MN đi qua điểm $N(1;2;3)$ và có một vector chỉ phương là

$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1;-2;-1) \text{ nên có phương trình là } \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): -x+2y-2z+1=0$ là

A. $\begin{cases} x=3-1t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3-1t \\ y=2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-1-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-1t \\ y=2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P): -x+2y-2z+1=0$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2;-2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$(P): -x+2y-2z+1=0 \text{ là } \begin{cases} x=3-1t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P) có phương trình $(P): x+z+1=0$.

A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k}(0;0;1)$

Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;0;1)$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P) , khi đó

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Chọn B

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$,

Đường thẳng $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}' = (1;-1;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 , khi đó

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 150° .

D. 120° .

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;2)$,

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) , khi đó

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(1;-2;3); R = 5.$

B. $I(-1;2;-3); R = 5.$

C. $I(1;-2;3); R = 25.$

D. $I(-1;2;-3); R = 25.$

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$ và $B(5;4;4)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 17.$

B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17.$

C. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{17}.$

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{17}.$

Lời giải

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3;2;1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{17}.$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17.$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(2;1;0)$ và $A(1;2;3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(S):(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{11}.$

B. $(S):(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{11}.$

C. $(S):(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11.$

D. $(S):(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;0)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{11}$ có phương trình là:
 $(S):(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11.$

👉 Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1), B(0;1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0.$

a) Điểm A thuộc mặt phẳng $(P).$

b) Mặt phẳng (P) song song với trục $Oz.$

c) Mặt phẳng (α) đi qua A, B vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 1 = 0$

d) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương có phương trình: $(Q): x - y - 1 = 0$

Lời giải.

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Thay tọa độ điểm A vào phương trình (P) ta có: $(P): 1 + 2 - 3 = 0$ (đẳng thức đúng)

Vậy điểm A thuộc mặt phẳng (P) nên **a) đúng**.

b) Ta có phương trình mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$ khuyết ẩn z nên (P) song song hoặc chứa trục Oz . Mặt khác điểm O không thuộc (P) nên (P) song song với trục Oz . Nên **b) đúng**

c)

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1; 3; -4) \\ \overrightarrow{n_p} = (1; -1; 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}] = (-4; -4; -2) = -2(2; 2; 1)$$

Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; -2; 1)$ và nhận $\overrightarrow{n_\alpha}$ làm VTPT có phương trình

$$2x + 2y + z + 1 = 0 \text{ nên c) sai}$$

d)

Ta có, (Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q): x - y + C = 0; C \neq -3$

Chọn $M(3; 0; 0) \in (P)$

$$\text{Ta có } d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|3 + C|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$C = 1 \Rightarrow (Q): x - y + 1 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-1; 0; 0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C = -7 \Rightarrow (Q): x - y - 7 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7; 0; 0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): x - y - 7 = 0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): x - y - 7 = 0$. **d) sai**

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$.

a) Điểm M thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

c) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình

$$d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$$

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng d ta có: $d: \frac{1}{1} = \frac{-3}{-1} = \frac{3}{2}$ (không thỏa mãn). Vậy $M \notin d$ nên **a sai**.

b) Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên Δ có VTCP là $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (1; 2; -2)$

Δ đi qua M nên phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$
 suy ra **b sai**

c) Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (1; -1; 2)$, (P) có VTPT là $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$

$\Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 1 - 2 - 4 = -5 \neq 0$ nên d cắt (P) suy ra **c sai**

d)

Gọi d' là hình chiếu của d lên (P) ;

• Tọa độ $A = d \cap (P)$ thỏa
$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} = \frac{x+2y-2z+2}{1-2-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0; 0; 1).$$

• Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P)

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; -1; 2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$.

Suy ra (Q) có VTPT là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (-2; 4; 3)$.

• Khi đó do $d' = (P) \cap (Q)$ nên $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (14; 1; 8)$ là vectơ chỉ phương của (d') .

• Đường thẳng d' đi qua $A(0; 0; 1)$ và có VTCP là $\vec{u}_{d'} = (14; 1; 8)$ có phương trình chính tắc

là $d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$.

Vậy **d) đúng**.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Gọi B là điểm thuộc (S) sao cho tam giác OAB là tam giác đều.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2$.

b) Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Điểm O nằm trên mặt cầu (S) .

d) Mặt phẳng (OAB) có phương trình là $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Lời giải.

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai

Các hệ số $a=2; b=2; c=2; d=0$ nên mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$.

b) Sai

$$IA = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3} = R \text{ nên điểm } A \text{ nằm trên mặt cầu } (S).$$

c) Đúng

$$OI = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} = R \text{ nên điểm } O \text{ nằm trên mặt cầu } (S).$$

d) Đúng

Theo kết quả câu (b) và (c), điểm O và A cùng thuộc (S) .

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$d(I; (OAB)) = \sqrt{R^2 - (R')^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mặt phẳng (OAB) đi qua O nên có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) (*)

Do (OAB) đi qua A , suy ra: $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

$$\text{Lúc đó: } d(I; (OAB)) = \frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ c = -a \end{cases}. \text{ Theo } (*), \text{ suy ra } (OAB): x - y + z = 0 \text{ hoặc } x - y - z = 0.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0); B(3;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;5)$.

a) . Điểm C có tọa độ là $(3;2;0)$.

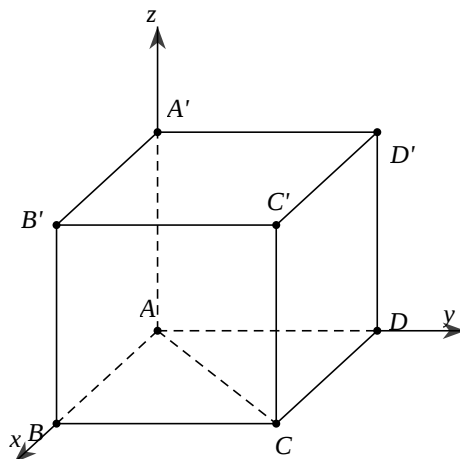
b) . Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 5.

c) . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 2.

d) . Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\frac{289}{361}$.

Lời giải.

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng

Hình chiếu của điểm C trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3; 2; 0)$.

b) Sai

Ta có $AB = 3; AD = 2; AA' = 5$.

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = 2.3.5 = 30.$$

c) Sai

Phương trình mặt phẳng $(A'BD)$ là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow 10x + 15y + 6z - 30 = 0$.

$$d(A; (A'BD)) = \frac{|-30|}{\sqrt{10^2 + 15^2 + 6^2}} = \frac{30}{19}.$$

d) Đúng

$$B'(3; 0; 5); D'(0; 2; 5) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (3; 0; 5) \\ \overrightarrow{AD'} = (0; 2; 5) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-10; -15; 6).$$

Vậy mặt phẳng $(AB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n}(10; 15; -6)$.

$$C(3; 2; 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{B'C} = (0; 2; -5) \\ \overrightarrow{D'C} = (3; 0; -5) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{D'C}] = (-10; -15; -6).$$

Vậy mặt phẳng $(CB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n'}(10; 15; 6)$.

$$\cos((AB'D'); (CB'D')) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|} = \frac{289}{361}.$$

📖 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ là

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 6 = 0$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi $M(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Giá trị của $a + b + c$ bằng.....

Lời giải

Vì $M \in d \Rightarrow M(1 + 2t; -t; 1 - t)$

Mà $M \in (P)$ nên: $1 + 2t - (-t) + 1 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow M(5; -2; -1)$

Vậy $a + b + c = 2$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

và $d_2: \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với hai đường thẳng d_1, d_2 có dạng: $Ax + By + Cz + 26 = 0$. Giá trị của $T = 2A + 3B + C$ bằng

Lời giải

Hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 1), \vec{u}_2 = (2; 1; -1)$.

Vì (α) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên có vtp $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (1; 3; 5)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $1(x - 0) + 3(y - 1) + 5(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0.$$

$$\Leftrightarrow -2x - 6y - 10z + 26 = 0.$$

Suy ra $A = -2, B = -6, C = -10$.

$$\Rightarrow T = 2A + 3B + C = -32$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$

và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2: \begin{cases} x + 3 = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 4}{3} \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng.....

Lời giải

Đáp án :20

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; -2; 3)$ và đi qua điểm $N(-3; 1; -4)$

Ta có: $\vec{y}, \vec{u}_{\vec{u}} = (4; 5; 2)^T \vec{0}; \overline{MN} = (-4; 4; -6); \vec{y}, \vec{u}_{\vec{u}} \overline{MN} = -16 + 20 - 12 = -8 \neq 0$

Đ d_1 và d_2 chéo nhau.

Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 nên (P) nhận $\vec{y}, \vec{u}_{\vec{u}} = (4; 5; 2)$ làm một vector pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-1; -1; -1)$ của đoạn MN

Suy ra phương trình của (P) : $4(x+1) + 5(y+1) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 2z + 11 = 0$

Đ $a = 4; b = 5; c = 2$ Đ $a + 2b + 3c = 20$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2; 1; 3)$, $A(0; 0; 4)$ và cắt hai trục Ox , Oy lần lượt tại B , C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Lời giải

ĐS: 2

Gọi $B(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy .

Phương trình mặt phẳng (P) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{4} = 1$.

Vì $M(2; 1; 3)$ thuộc (P) nên ta có $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4a + 8b = ab$.

Diện tích tam giác $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| = \frac{1}{2} |ab| = 1 \Leftrightarrow |ab| = 2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 8b = ab \\ ab = 2 \end{cases}, (I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 2 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 1 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 - 4b \\ (1 - 4b)b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 - 4b \\ 4b^2 - b + 4 = 0, (vn) \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 8b = ab \\ ab = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = -2 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -1 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 - 4b \\ (-1 - 4b)b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 - 4b \\ 4b^2 + b - 4 = 0 \end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (hình vẽ minh họa). Biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S): (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 36$. Nắp của bồn chứa nằm trên mặt phẳng $(P): z = 9$. Khoảng cách từ đáy đến nắp bồn chứa bằng



Lời giải

Trả lời: 10

Bồn chứa có tâm $I(5;5;5)$, bán kính $R = 6$.

Khoảng cách từ tâm đến nắp bồn chứa là $d = \frac{|5-9|}{\sqrt{1}} = 4$.

Vậy khoảng cách từ đáy đến nắp bồn chứa là $h = d + R = 4 + 6 = 10$.

♦ Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; -4)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.
C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $1(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d

- A.** $\vec{u} = (1; 3; -2)$. **B.** $\vec{u} = (2; 5; 3)$. **C.** $\vec{u} = (2; -5; 3)$. **D.** $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -5; 3)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

- A.** $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.
C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$. **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm vector chỉ phương có phương trình là

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

Câu 5: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(1; -1; 7)$ là

- A.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. **B.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$. **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R = IA = 5$.

Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 6 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là

- A.** $(Q): -x - y + z - 6 = 0$. **B.** $(Q): x + y - z - 6 = 0$.
C. $(Q): x + y + z - 6 = 0$. **D.** $(Q): x - y - z + 6 = 0$.

Lời giải

Cách 1:

Theo tính chất đối xứng qua O thì $(P) \parallel (Q)$, suy ra (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Lấy điểm $M(0, 0, 6) \in (P)$.

Điểm đối xứng với M qua O là $M'(0; 0; -6)$.

Mà $M' \in (Q)$, suy ra $(Q): x + y - z - 6 = 0$.

Cách 2: Gọi M' là điểm đối xứng với M qua O .

Giả sử $M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow (P): x + y - z + 6 = 0. \Leftrightarrow (-x) + (-y) + (-z) - 6 = 0$.

$\Rightarrow M'(-x; -y; -z) \in (Q): x + y - z - 6 = 0$.

Câu 7: Cho ba điểm $A(3; 0; 0), B(0; -6; 0), C(0; 2; -3)$. Tính khoảng cách d từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (Oxy) .

A. $d = 2$.

B. $d = 3$.

C. $d = 1$.

D. $d = 4$.

Lời giải

Cách 1: Theo định lí Thales ta có

$$d = d(G, (Oxy)) = \frac{1}{3} d(C, (Oxy)) = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

Cách 2: Cao độ của trọng tâm G là $z_G = -1$.

Khoảng cách $d = d(G, (Oxy)) = |-1| = 1$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

A. $\frac{4}{9}$.

B. $-\frac{4}{9}$.

C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β) .

Ta có $\vec{n}_\alpha(2; -1; 2); \vec{n}_\beta(1; 2; -2)$.

Áp dụng công thức

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}. \text{ Khẳng định nào sau đây đúng?}$$

- A. d_1 và d_2 chéo nhau. **B.** $d_1 \equiv d_2$. C. $d_1 \perp d_2$. D. $d_1 \parallel d_2$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 4; 6)$, đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.

Ta có $\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2$, $M(2; 0; -3) \in d_1$ và $M(2; 0; -3) \in d_2$ nên $d_1 \equiv d_2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+24}{3} = \frac{y-25}{4} = \frac{z}{-5}$ và $\Delta_2: \frac{x-26}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

- A. 81° . **B.** 82° . C. 62° . D. 83° .

Lời giải

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3; 4; -5)$ và $\vec{u}_2 = (5; 3; 4)$.

$$\text{Ta có: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{7}{50}.$$

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 82^\circ$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$.

Mặt phẳng (P) có VTPT là: $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$.

Vì Δ vuông góc mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$ làm VTCP.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

A. 64° .

B. 63° .

C. 62° .

D. 65° .

Lời giải

Ta có: $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng và $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\text{Khi đó, } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\Delta, (P)) = \sqrt{1 - \sin^2(\Delta, (P))} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{9}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$.

Khẳng định nào sau là đúng hay sai?	Đúng	Sai
a) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $2x - y + 3z - 9 = 0$.		
b) Mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(R): x + 2y - 2z - 5 = 0$.		
c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $\sqrt{14}$.		
d) Hình chiếu vuông góc của điểm $A(0; -3; 2)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $H\left(\frac{26}{11}; -\frac{48}{11}; -\frac{17}{11}\right)$.		

Lời giải

a) **Đúng.**

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Theo bài $(Q) // (P) \Rightarrow (Q): 2x - y + 3z + m = 0 \ (m \neq 5)$

Mà (Q) qua $A \Leftrightarrow 2 \cdot 0 - (-3) + 3 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$ (tm).

Vậy mp $(Q): 2x - y + 3z - 9 = 0$.

b) **Sai.**

$(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1(2; -1; 3)$.

$(R): x + 2y - 2z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2(1; 2; -2)$.

Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -6 \neq 0 \Rightarrow (P)$ không vuông góc với (R) .

c) **Đúng.**

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$:

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 + 3 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

d) **Sai.**

Phương trình đường thẳng D đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) , có VTCP là

$\vec{u}(2; -1; 3)$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow \{H\} = D \cap (P)$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4t + 3 + t + 3(2 + 3t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Vậy $H(-2; -2; -1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$, $B(1; -2; 3)$ và đường thẳng D :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Khẳng định nào sau là đúng hay sai?	Đúng	Sai
a) Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$		
b) Đường thẳng AB song song với đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$.		
c) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng D là $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.		
d) Hình chiếu vuông góc của điểm $O(0; 0; 0)$ lên đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ là $H(1; -2; 1)$.		

Lời giải

a) **Đúng.**

Phương trình đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$ làm vtcp:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b) **Đúng.**

Đường thẳng AB có vtpt $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$

Đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ có vtcp $\vec{u}(1;1;1)$

Và $A(0; -3; 2) \notin D$ nên $AB \nparallel D$.

c) **Sai.**

Đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và $\vec{u}_\Delta = (1; 1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2; 2; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_\Delta] = (2; -2; 0)$.

Khi đó $d(A, \Delta) = \frac{||[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_\Delta]||}{||\vec{u}_\Delta||} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

d) **Đúng.**

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ , khi đó $H(2+t; -1+t; 2+t)$.

Ta có $\overrightarrow{OH} = (2+t; -1+t; 2+t)$ và $\vec{u}_\Delta = (1; 1; 1)$.

Vì $OH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2+t-1+t+2+t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Do đó tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $O(0; 0; 0)$ lên đường thẳng D là $H(1; -2; 1)$.

Câu 3: Cho $A(1; 2; 3)$, $B(5; 5; 8)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = \frac{5}{2} - 2t \end{cases}$. Mặt cầu (S) có đường kính AB .

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Mặt cầu (S) có tâm $I\left(3; \frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.		
b)	Điểm $O(0; 0; 0)$ nằm trong mặt cầu (S) .		

c)	Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.		
d)	Mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn đường kính $\sqrt{14}$.		

Lời giải

a) **Đúng:**

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I\left(3; \frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Và $\overline{AB} = (4; 3; 5) \Leftrightarrow AB = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Vậy mặt cầu đường kính AB có tâm $I\left(3; \frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

b) **Sai:**

Ta có $\overline{OI} = \left(3; \frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right) \Rightarrow OI = \sqrt{3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{206}}{2} > \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra điểm O nằm ngoài mặt cầu.

c) **Sai:**

Cách 1. Sử dụng công thức khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

Ta có đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = \frac{5}{2} - 2t \end{cases}$ có $M\left(3; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Khi đó $\overline{IM} = (0; -2; -3) \Rightarrow [\overline{IM}, \vec{u}] = (10; -3; 2)$.

Do đó $d(I, d) = \frac{\|[\overline{IM}, \vec{u}]\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{10^2 + (-3)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{113}}{3} > \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy đường thẳng d nằm ngoài mặt cầu (S) .

Cách 2. Sử dụng số giao điểm của đường thẳng và mặt cầu:

Ta có phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Thay $x = 3 + t; y = \frac{3}{2} + 2t; z = \frac{5}{2} - 2t$ vào (S) ta có

$$(3+t-3)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2t - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2t - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (2t-2)^2 + (2t+3)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 4t + \frac{1}{2} = 0.$$

Vì phương trình $9t^2 + 4t + \frac{1}{2} = 0$ vô nghiệm nên đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) hay đường thẳng d nằm ngoài mặt cầu (S) .

d) **Đúng:**

Gọi giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn (C) có bán kính r .

Sử dụng công thức $R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2}$.

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{\left|3 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{7}{2} - 8\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

$$\text{Do đó } r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn đường kính $\sqrt{14}$.

Câu 4: Cho $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z = 1$.		
b)	Phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$.		
c)	Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $\frac{2}{\sqrt{3}}$.		
d)	Đường thẳng vuông góc chung của AC và OB có phương trình là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$.		

Lời giải

a) **Sai:**

Phương trình của (ABC) có dạng $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 4$.

b) **Đúng:**

Phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$\Leftrightarrow 2ax + 2by + 2cz - d = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1).$$

$$\text{Thay tọa độ các điểm } O, A, B, C \text{ vào (1), ta có hệ phương trình } \begin{cases} -d = 0 \\ 8a - d = 16 \\ 8b - d = 16 \\ 8c - d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Khi đó mặt cầu đi qua O, A, B, C có tâm $I(2; 2; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2 - 0} = 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$.

c) **Sai:**

Mặt phẳng (ABC) là $x + y + z - 4 = 0$.

$$\text{Khi đó } d(0, (ABC)) = \frac{|0+0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

d) **Đúng:**

Trong tam giác OAC hạ $OH \perp AC$.

Theo bài ra $(OAC) \perp OB \Rightarrow OH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} OH \perp AC \\ OH \perp OB \end{cases}$ nên OH là đường thẳng vuông góc chung của AC và OB .

Lại có $\overrightarrow{AC} = (-4; 0; 4)$ và $\overrightarrow{OB} = (0; 4; 0)$

Khi đó $\overrightarrow{OH} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}] = (16; 0; 16) = 16(1; 0; 1)$. Suy ra $\overrightarrow{u_{OH}} = (1; 0; 1)$.

Do đó phương trình đường thẳng OH là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

Nhận thấy đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ có $\vec{u} = (2; 0; 2) = 2\overrightarrow{u_{OH}}$ và đều đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ nên

đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ trùng nhau.

Vậy đường thẳng vuông góc chung của AC và OB có phương trình là
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 5z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) . Điểm $M(a; b; c)$ là giao điểm của d và P . Tính $S = \frac{28}{25}(a + b + c)$.

Lời giải

Đáp án: 2,24.

Ta có: $M = d \cap (P)$ nên $M(-1 + 2t; -1 + t; -5 + 6t)$.

Suy ra $-1 + 2t - 1 + t - 5(-5 + 6t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 27 = 27t \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $M(1; 0; 1)$. Kết luận $S = 2,24$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta): x + y + z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có dạng $\Delta: \frac{x+a}{c} = \frac{y-b}{d} = \frac{z}{1}$. Tính $T = (a + b + c + 3d).2024$?

Lời giải

Đáp án: 4048.

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta} = (2; -3; 1)$.

Điểm chung của (α) và (β) là $A(-4; 5; 0)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z}{1}$.

Nên $T = (a + b + c + 3d).2024 = (4 + 5 + 2 - 9).2024 = 4048$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và $(\Delta'): \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ chéo nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng trên là bao nhiêu ? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 2,45

Ta có: $M(2; 2; 0) \in (\Delta)$ và $M'(2; -1; 0) \in (\Delta')$.

Nên $\overrightarrow{MM'} = (0; 3; 0)$.

Có $\vec{u} = (1; 1; -1)$ và $\vec{u}' = (1; 2; -3)$ lần lượt là VTCP của đường thẳng (Δ) và (Δ') .

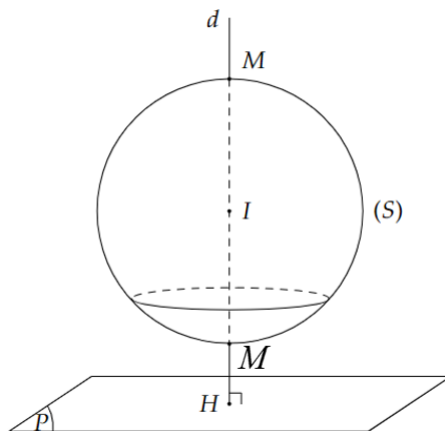
Suy ra $[\vec{u}; \vec{u}'] = (-1; 2; 1)$.

$$\text{Nên } d((\Delta), (\Delta')) = \frac{|[\vec{u}; \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM}|}{|[\vec{u}; \vec{u}']|} = \frac{6}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} \approx 2,45.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c$ có giá trị bằng

Lời giải

Đáp số: 3



$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \text{ có } \begin{cases} I(1; 2; 3) \\ R = 3 \end{cases}.$$

Ta có $d(I, (P)) = 9 > R$ nên mặt phẳng (P) và (S) không có điểm chung.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Điểm M cần tìm là giao điểm của d và (S) .

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 3 \\ y = 4 \\ z = 2 \\ t = -1 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(3; 4; 2) \\ M_2(-1; 0; 4) \end{cases}$$

$$d(M_1, (P)) > d(M_2, (P)).$$

Vậy điểm $M_2(-1; 0; 4)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Suy ra } a + b + c = 3.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 0; 3)$ và chuyển động theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 2; 1)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Hai cột trụ cáp treo đặt tại điểm B, C biết $x_B = 20; y_C = 120$. Thời gian cabin đi từ điểm B đến điểm C là 55s. Hỏi vận tốc của cabin bằng bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Đáp số: 3

$$\text{Phương trình tham số của đường cáp treo là: } d: \begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$x_B = 20 \Rightarrow B(20; 10; 8), \quad y_C = 120 \Rightarrow C(130; 120; 63).$$

$$BC = \sqrt{110^2 + 110^2 + 55^2} = 165(m).$$

$$\text{Vậy vận tốc của cabin đi là } v = \frac{165}{55} = 3(m/s).$$

Câu 6. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet) vào một ngôi nhà 1 tầng có diện tích $50m^2$, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3; 4; 33)$ và $B(9; 8; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Biết giá tiền $1m^3$ bê tông tươi là 1.100.000 (đồng), tiền công đổ mái là 100.000 đồng trên $1m^2$. Chi phí chủ nhà phải trả để đổ được mái bằng bao nhiêu (đơn vị tính triệu đồng).

Lời giải

Đáp số: 16

Vì mặt dưới mái nhà vuông góc với trục Oz và đi qua điểm $A(3; 4; 33)$ nên có phương trình là $(P): z - 33 = 0$.

Khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà bằng khoảng cách từ $B(9;8;35)$ đến (P)

$$\text{Ta có } d(B, (P)) = \frac{|35 - 33|}{1} = 2.$$

Suy ra độ dày của mái nhà bằng $2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m}$.

Thể tích beton cần đổ mái là $50.0,2 = 10 \text{ m}^3$.

Tiền beton cần trả là $10.1100000 = 11000000$ (đồng).

Tiền công cần trả là $50.100000 = 5000000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền chủ nhà cần trả là $16.000.000$ (đồng).

♦ Đề 3:

 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n}_2 = (2; -1; 2)$. **B.** $\vec{n}_4 = (3; 2; 1)$. **C.** $\vec{n}_3 = (3; 2; 2)$. **D.** $\vec{n}_1 = (3; 2; -1)$.

Lời giải

Mặt phẳng $3x + y - 7z - 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1; -7)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?

- A.** $Q(1; -2; 2)$. **B.** $N(1; -1; -1)$. **C.** $P(2; -1; -1)$. **D.** $M(1; 1; -1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm Q, N, P, M vào phương trình mặt phẳng (α) , thấy tọa độ điểm N thỏa mãn.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 2; 1)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (5; 2; -3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

- A.** $5x + 2y - 3z - 17 = 0$. **B.** $2x + 2y + z - 11 = 0$.
C. $5x + 2y - 3z - 11 = 0$. **D.** $2x + 2y + z - 17 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$5(x - 2) + 2(y - 2) - 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 3z - 11 = 0$$

Vậy $(P): 5x + 2y - 3z - 11 = 0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$. Một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

- A.** $(-1;1;3)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(1;1;3)$. **D.** $(2;4;1)$.

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$. Do đó một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là: $(-1;1;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;1)$, $N(1;2;3)$. Phương trình đường thẳng MN là

- A.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-1+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-3-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2, t \in \mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-2;4;2)$.

Đường thẳng MN đi qua điểm $N(1;2;3)$ và có một vector chỉ phương là

$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1;-2;-1) \text{ nên có phương trình là } \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): -x + 2y - 2z + 1 = 0$ là

- A.** $\begin{cases} x=3-1t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3-1t \\ y=2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=-1-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-1t \\ y=2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P): -x + 2y - 2z + 1 = 0$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2;-2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(3;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$(P): -x + 2y - 2z + 1 = 0 \text{ là } \begin{cases} x=3-1t \\ y=-2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P) có phương trình $(P): x + z + 1 = 0$.

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Mặt phẳng (Oxy) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{k}(0;0;1)$

Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;0;1)$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P) , khi đó

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Chọn B

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$,

Đường thẳng $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}' = (1;-1;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 , khi đó

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 150° . **D.** 120° .

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;2)$,

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) , khi đó

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(1; -2; 3); R = 5$.

B. $I(-1; 2; -3); R = 5$.

C. $I(1; -2; 3); R = 25$.

D. $I(-1; 2; -3); R = 25$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -2)$ và $B(5; 4; 4)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 17$.

B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17$.

C. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{17}$.

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{17}$.

Lời giải

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3; 2; 1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{17}$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(2; 1; 0)$ và $A(1; 2; 3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{11}$.

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{11}$.

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$.

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 0)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{11}$ có phương trình là:

$(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$.

Phân 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$.

Khẳng định nào sau là đúng hay sai?	Đúng	Sai
a) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $2x - y + 3z - 9 = 0$.		

b) Mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(R): x + 2y - 2z - 5 = 0$.		
c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $\sqrt{14}$.		
d) Hình chiếu vuông góc của điểm $A(0; -3; 2)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ là $H\left(\frac{26}{11}; -\frac{48}{11}; -\frac{17}{11}\right)$.		

Lời giải

a) **Đúng.**

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Theo bài $(Q) // (P) \Rightarrow (Q): 2x - y + 3z + m = 0 \ (m \neq 5)$

Mà (Q) qua $A \Leftrightarrow 2.0 - (-3) + 3.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$ (tm).

Vậy mp $(Q): 2x - y + 3z - 9 = 0$.

b) **Sai.**

$(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1(2; -1; 3)$.

$(R): x + 2y - 2z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2(1; 2; -2)$.

Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -6 \neq 0 \Rightarrow (P)$ không vuông góc với (R) .

c) **Đúng.**

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$:

$$d(A, (P)) = \frac{|2.0 + 3 + 3.2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

d) **Sai.**

Phương trình đường thẳng D đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) , có VTCP là

$$\vec{u}(2; -1; 3)$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$y = -3 - t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$z = 2 + 3t$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow \{H\} = D \cap (P)$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

$$y = -3 - t$$

$$z = 2 + 3t$$

$$2x - y + 3z + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4t + 3 + t + 3(2 + 3t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Vậy $H(-2; -2; -1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -3; 2)$, $B(1; -2; 3)$ và đường thẳng D :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Khẳng định nào sau là đúng hay sai?	Đúng	Sai
a) Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$		
b) Đường thẳng AB song song với đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$.		
c) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng D là $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.		
d) Hình chiếu vuông góc của điểm $O(0;0;0)$ lên đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ là $H(1;-2;1)$.		

Lời giải

a) **Đúng.**

Phương trình đường thẳng AB nhận $\vec{AB}(1;1;1)$ làm vtcp: $\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

b) **Đúng.**

Đường thẳng AB có vtpt $\vec{AB}(1;1;1)$

Đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ có vtcp $\vec{u}(1;1;1)$

Và $A(0;-3;2) \notin D$ nên $AB \parallel D$.

c) **Sai.**

Đường thẳng $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ đi qua điểm $M(2;-1;2)$ và $\vec{u}_\Delta = (1;1;1)$.

Ta có $\vec{AM} = (2;2;0) \Rightarrow [\vec{AM}, \vec{u}_\Delta] = (2;-2;0)$.

Khi đó $d(A, \Delta) = \frac{||[\vec{AM}, \vec{u}_\Delta]||}{||\vec{u}_\Delta||} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) **Đúng.**

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ , khi đó $H(2+t;-1+t;2+t)$.

Ta có $\vec{OH} = (2+t;-1+t;2+t)$ và $\vec{u}_\Delta = (1;1;1)$.

Vì $OH \perp \Delta$ nên $\vec{OH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2+t-1+t+2+t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Do đó tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $O(0;0;0)$ lên đường thẳng D là $H(1;-2;1)$.

Câu 3: Cho $A(1;2;3)$, $B(5;5;8)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = \frac{5}{2} - 2t \end{cases}$. Mặt cầu (S) có đường kính AB .

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Mặt cầu (S) có tâm $I\left(3;\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.		
b)	Điểm $O(0;0;0)$ nằm trong mặt cầu (S) .		
c)	Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.		
d)	Mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn đường kính $\sqrt{14}$.		

Lời giải

a) **Đúng:**

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I\left(3;\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$.

Và $\overline{AB} = (4;3;5) \Leftrightarrow AB = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Vậy mặt cầu đường kính AB có tâm $I\left(3;\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

b) **Sai:**

Ta có $\overline{OI} = \left(3;\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right) \Rightarrow OI = \sqrt{3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{206}}{2} > \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra điểm O nằm ngoài mặt cầu.

c) **Sai:**

Cách 1. Sử dụng công thức khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

Ta có đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = \frac{5}{2} - 2t \end{cases}$ có $M\left(3;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $\vec{u} = (1;2;-2)$.

Khi đó $\overrightarrow{IM} = (0; -2; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (10; -3; 2)$.

$$\text{Do đó } d(I, d) = \frac{[\overrightarrow{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{10^2 + (-3)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{113}}{3} > \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy đường thẳng d nằm ngoài mặt cầu (S) .

Cách 2. Sử dụng số giao điểm của đường thẳng và mặt cầu :

Ta có phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Thay $x = 3 + t; y = \frac{3}{2} + 2t; z = \frac{5}{2} - 2t$ vào (S) ta có

$$(3+t-3)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2t - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2t - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (2t-2)^2 + (2t+3)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 4t + \frac{1}{2} = 0.$$

Vì phương trình $9t^2 + 4t + \frac{1}{2} = 0$ vô nghiệm nên đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) hay đường thẳng d nằm ngoài mặt cầu (S) .

d) Đúng:

Gọi giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn (C) có bán kính r .

$$\text{Sử dụng công thức } R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2}.$$

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{\left|3 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{7}{2} - 8\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

$$\text{Do đó } r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn đường kính $\sqrt{14}$.

Câu 4: Cho $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z = 1$.		

b)	Phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12.$		
c)	Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $\frac{2}{\sqrt{3}}.$		
d)	Đường thẳng vuông góc chung của AC và OB có phương trình là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}.$		

Lời giải

a) **Sai:**

Phương trình của (ABC) có dạng $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 4.$

b) **Đúng:**

Phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$\Leftrightarrow 2ax + 2by + 2cz - d = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1).$$

$$\text{Thay tọa độ các điểm } O, A, B, C \text{ vào (1), ta có hệ phương trình } \begin{cases} -d = 0 \\ 8a - d = 16 \\ 8b - d = 16 \\ 8c - d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Khi đó mặt cầu đi qua O, A, B, C có tâm $I(2; 2; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2 - 0} = 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu đi qua O, A, B, C là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12.$

c) **Sai:**

Mặt phẳng (ABC) là $x + y + z - 4 = 0.$

$$\text{Khi đó } d(O, (ABC)) = \frac{|0+0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

d) **Đúng:**

Trong tam giác OAC hạ $OH \perp AC.$

Theo bài ra $(OAC) \perp OB \Rightarrow OH \perp BC.$

Vì $\begin{cases} OH \perp AC \\ OH \perp OB \end{cases}$ nên OH là đường thẳng vuông góc chung của AC và $OB.$

Lại có $\overrightarrow{AC} = (-4; 0; 4)$ và $\overrightarrow{OB} = (0; 4; 0)$

Khi đó $\overrightarrow{OH} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}] = (16; 0; 16) = 16(1; 0; 1)$. Suy ra $\overrightarrow{u_{OH}} = (1; 0; 1)$.

Do đó phương trình đường thẳng OH là
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Nhận thấy đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ có $\vec{u} = (2; 0; 2) = 2\overrightarrow{u_{OH}}$ và đều đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ nên

đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ trùng nhau.

Vậy đường thẳng vuông góc chung của AC và OB có phương trình là
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 5z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) . Điểm $M(a; b; c)$ là giao điểm của d và P . Tính $S = \frac{28}{25}(a + b + c)$.

Lời giải

Đáp án: 2,24.

Ta có: $M = d \cap (P)$ nên $M(-1 + 2t; -1 + t; -5 + 6t)$.

Suy ra $-1 + 2t - 1 + t - 5(-5 + 6t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 27 = 27t \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $M(1; 0; 1)$. Kết luận $S = 2,24$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta): x + y + z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có dạng $\Delta: \frac{x+a}{c} = \frac{y-b}{d} = \frac{z}{1}$. Tính $T = (a + b + c + 3d) \cdot 2024$?

Lời giải

Đáp án: 4048.

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u_{\Delta}} = (2; -3; 1)$.

Điểm chung của (α) và (β) là $A(-4; 5; 0)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z}{1}$.

Nên $T = (a + b + c + 3.d).2024 = (4 + 5 + 2 - 9).2024 = 4048$.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và $(\Delta'): \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ chéo nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng trên là bao nhiêu ? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 2,45

Ta có: $M(2;2;0) \in (\Delta)$ và $M'(2;-1;0) \in (\Delta')$.

Nên $\overrightarrow{MM'} = (0;3;0)$.

Có $\vec{u} = (1;1;-1)$ và $\vec{u'} = (1;2;-3)$ lần lượt là VTCP của đường thẳng (Δ) và (Δ') .

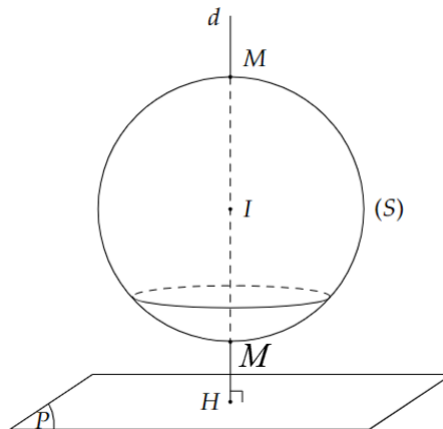
Suy ra $[\vec{u};\vec{u'}] = (-1;2;1)$.

$$\text{Nên } d((\Delta), (\Delta')) = \frac{|[\vec{u};\vec{u'}] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{\|[\vec{u};\vec{u'}]\|} = \frac{6}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} \approx 2,45.$$

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c$ có giá trị bằng

Lời giải

Đáp số: 3



$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \text{ có } \begin{cases} I(1;2;3) \\ R=3 \end{cases}.$$

Ta có $d(I, (P)) = 9 > R$ nên mặt phẳng (P) và (S) không có điểm chung.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Điểm M cần tìm là giao điểm của d và (S) .

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 3 \\ y = 4 \\ z = 2 \\ t = -1 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(3; 4; 2) \\ M_2(-1; 0; 4) \end{cases}$$

$$d(M_1, (P)) > d(M_2, (P)).$$

Vậy điểm $M_2(-1; 0; 4)$ là điểm cần tìm.

Suy ra $a + b + c = 3$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 0; 3)$ và chuyển động theo đường cáp có vector chỉ phương $\vec{u}(2; 2; 1)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Hai cột trụ cáp treo đặt tại điểm B, C biết $x_B = 20; y_C = 120$. Thời gian cabin đi từ điểm B đến điểm C là 55s. Hỏi vận tốc của cabin bằng bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Đáp số: 3

$$\text{Phương trình tham số của đường cáp treo là: } d : \begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$x_B = 20 \Rightarrow B(20; 10; 8), \quad y_C = 120 \Rightarrow C(130; 120; 63).$$

$$BC = \sqrt{110^2 + 110^2 + 55^2} = 165(m).$$

$$\text{Vậy vận tốc của cabin đi là } v = \frac{165}{55} = 3(m/s).$$

Câu 6. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet) vào một ngôi nhà 1 tầng có diện tích $50m^2$, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3; 4; 33)$ và $B(9; 8; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Biết giá tiền $1m^3$ bê tông tươi là 1.100.000 (đồng), tiền công đổ mái là

100.000 đồng trên 1m^2 . Chi phí chủ nhà phải trả để đổ được mái bằng bao nhiêu (đơn vị tính triệu đồng).

Lời giải

Đáp số: 16

Vì mặt dưới mái nhà vuông góc với trục Oz và đi qua điểm $A(3;4;33)$ nên có phương trình là $(P): z - 33 = 0$.

Khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà bằng khoảng cách từ $B(9;8;35)$ đến (P) .

$$\text{Ta có } d(B, (P)) = \frac{|35 - 33|}{1} = 2.$$

Suy ra độ dày của mái nhà bằng $2\text{dm} = 0,2\text{ m}$.

Thể tích beton cần đổ mái là $50.0,2 = 10\text{m}^3$.

Tiền beton cần trả là $10.1100\,000 = 11\,000\,000$ (đồng).

Tiền công cần trả là $50.100\,000 = 5\,000\,000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền chủ nhà cần trả là $16.000.000$ (đồng).